К-1 I вариант

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 60). Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

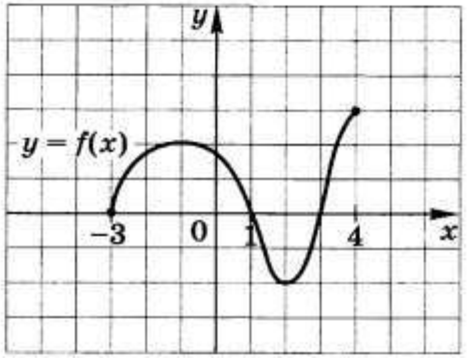

Рис. 60

2. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$.

3. Постройте график функции $y=(x-2)^2-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

4. Докажите, что функция $f(x)$ четная, если:

а) $f(x)=7\cos 4x+3x^2$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+2}-\dfrac{x^2+x}{x-2}$.

5*. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-4}+\log_3(5-x)$; б) $y=\sqrt{9-\dfrac{1}{x^2}}$.

6*. Постройте график функции $y=1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

7*. Постройте график функции $y=\sqrt{|x|}-2$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

К-1 II вариант

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 61). Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

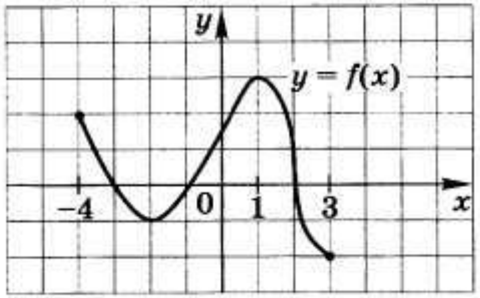

Рис. 61

2. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$.

3. Постройте график функции $y=(x-4)^2-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

4. Докажите, что функция $f(x)$ нечетная, если:

а) $f(x)=8\sin 3x-2x^5$; б) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}$.

5*. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{3-x}+\log_3(x^2-1)$; б) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-4}$.

6*. Постройте график функции $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+1$.

7*. Постройте график функции $y=\sqrt{|x|}-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

К—1

Вариант 1

1. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1, M — центр грани DD_1C_1C. Используя метод координат, найдите: 1) угол между прямыми AM и B_1D; 2) расстояние между серединами отрезков AM и B_1D.
3. Даны две точки: A, лежащая на оси ординат, и $B\ (1;\ 0;\ 1)$. Прямая AB составляет с плоскостью Oxz угол в $30°$. Найдите координаты точки A.

4*. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}\ \{6;\ 8;\ -7{,}5\}$ и образующего тупой угол с координатным вектором $\vec{j}$, если $|\vec{a}| = 50$.

К—1

Вариант 2

1. Даны точки $A\ (-1;\ 2;\ 1)$, $B\ (3;\ 0;\ 1)$, $C\ (2;\ -1;\ 0)$ и $D\ (2;\ 1;\ 2)$. Найдите:

   1) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;
   2) расстояние между серединами отрезков AB и CD.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, $\angle ACB = 120°$, $AC = CB = BB_1$. Используя векторы, найдите угол между прямыми AB и CB_1.
3. Даны две точки: A, лежащая в плоскости xOy, и $B\ (1;\ 1;\ 1)$, причем абсцисса точки A равна ее ординате. Прямая AB составляет с плоскостью zOy угол в $30°$. Найдите координаты точки A.

4*. Даны векторы $\vec{a}\ \{7;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{b}\ \{0;\ 0;\ 3\}$. Найдите множество точек M, для каждой из которых выполняются условия $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 0$ и $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{b} = 0$, где O — начало координат.

К-2 *I вариант*

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:
а) $f(x)=3x^5-12x^2+6x+2$, $x_0=1$; б) $f(x)=x\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$; б) $f(x)=5\sqrt[5]{x^3}$; в) $f(x)=5^x$; г) $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

3. Вычислите значение производной функции $y=\operatorname{tg}4x$ в точке $x_0=-\frac{\pi}{4}$.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=x^3-6x^2+9x-11$ равна нулю.

5*. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+3\sqrt[3]{x^4}$; б) $f(x)=\ln(3+2x)$; в) $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+3}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x=13+10t-5t^2$. Найдите момент времени t, когда точка остановится.

7*. Найдите производную функции $f(x)=\ln\sqrt{\cos x}$.

К-2 *II вариант*

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:
а) $f(x)=-6x^4+5x^3+3x^2+3$, $x_0=1$; б) $f(x)=x\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$; б) $f(x)=7\sqrt[7]{x^3}$; в) $f(x)=\log_5 x$;
г) $f(x)=\sqrt{4x-2}$.

3. Вычислите значение производной функции $y=\operatorname{ctg}3x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.

4. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=x^3+3x^2-9x-13$ равна нулю.

5*. Найдите $f'(x)$, если:
а) $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-6\sqrt[3]{x^4}$; б) $f(x)=e^{3x+2}$; в) $f(x)=x\sqrt{x^2-3x+4}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x=17+24t-4t^2$. Найдите момент времени t, когда точка остановится.

7*. Найдите производную функции $f(x)=e^{\sqrt{\sin x}}$.

К—2

Вариант 1

1. Прямоугольная трапеция с углом в 45° вращается вокруг прямой, содержащей большее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения, если основания трапеции равны 3 и 5.
2. В шар радиуса R вписан конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол φ.
   1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
   2) Если $\varphi = 30°$, то найдите наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через вершину конуса.

3*. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$, пересекает оси координат в точках A, B и C; A — точка пересечения с осью Ox, B — с осью Oy, а C — с осью Oz (координаты этих точек положительны). Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью $z = 0$.

К—2

Вариант 2

1. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Диагональ сечения равна 10 и удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. В эту пирамиду вписан шар радиуса R.
   1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
   2) Найдите длину окружности, по которой поверхность шара касается боковых граней пирамиды.

3*. Из точки M (−7; 3; −4) проведена касательная к сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$. Найдите длину касательной от точки M до точки касания.

К-4 *I вариант*

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

   а) $F(x)=x^3-5x^2+7x-11$ и $f(x)=3x^2-10x+7$, $x\in \boldsymbol{R}$;

   б) $F(x)=2x^5+e^x$ и $f(x)=10x^4+e^x$, $x\in \boldsymbol{R}$.

2. Найдите первообразную для функции:

   а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-2\sin x$, $x\neq 0$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

3. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4x^3-8x$, график которой проходит через точку $A(1;\ 3)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.

5*. Найдите:

   а) $\int\sqrt{3x+1}\,dx$; б) $\int\dfrac{dx}{1+9x^2}$.

6*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+7$ и $y=-x^2+4x-1$.

7*. Вычислите $\int\limits_0^3|x-2|\,dx$.

К-4 *II вариант*

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

   а) $F(x)=x^3+4x^2-5x+7$ и $f(x)=3x^2+8x-5$, $x\in \boldsymbol{R}$;

   б) $F(x)=3x^4-\ln x$ и $f(x)=12x^3-\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

2. Найдите первообразную для функции:

   а) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}+\cos x$, $x\neq 0$; б) $f(x)=3e^x$, $x\in \boldsymbol{R}$.

3. Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2+4x$, график которой проходит через точку $A(1;\ 5)$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=9$.

5*. Найдите:

   а) $\int\sqrt{4x+5}\,dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

6*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x+2$ и $y=-x^2+6x-6$.

7*. Вычислите $\int\limits_0^3|x-1|\,dx$.

К-3 *I вариант*

1. Дана функция $f(x)=2x^3+3x^2-1$. Найдите:
   а) промежутки возрастания и убывания функции;
   б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-1;\ 2]$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+3x^2-2x+2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.
3. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x$ и постройте ее график.
4. Число 72 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них были равны между собой, а сумма квадратов этих трех чисел была наименьшей.

5*. Дана функция $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$. Найдите:
   а) область определения функции;
   б) промежутки возрастания и убывания функции;
   в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[2;\ 5]$.

6*. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2+2x+10$, параллельной прямой $y=-x+5$.

7*. Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=5x-\sin 2x$.

К-3 *II вариант*

1. Дана функция $f(x)=x^3-3x^2+1$. Найдите:
   а) промежутки возрастания и убывания функции;
   б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2;\ 1]$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2+2x+4$ в точке с абсциссой $x_0=1$.
3. Исследуйте функцию $f(x)=x^4-2x^2$ и постройте ее график.
4. Число 78 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них были пропорциональны числам 1 и 3, а сумма квадратов этих трех чисел была наименьшей.

5*. Дана функция $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-7}$. Найдите:
   а) область определения функции;
   б) промежутки возрастания и убывания функции;
   в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[3;\ 7]$.

6*. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+3x^2+x+7$, параллельной прямой $y=-2x+1$.

7*. Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y=7x+\cos 2x$.

К—3

Вариант 1

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом $60°$. Расстояние от центра основания до боковой грани равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу 2α. Диагональ полученного сечения составляет с осью цилиндра угол φ и удалена от нее на расстояние, равное d. Найдите объем цилиндра.

3*. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через концы трех ребер, исходящих из вершины C, проведена плоскость на расстоянии $4\sqrt{2}$ от этой вершины, составляющая с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 2α. Радиус основания конуса равен R. Найдите объем конуса.

3*. В призме, данной в задаче 1, проведена плоскость, перпендикулярная диагонали призмы и делящая ее в отношении $1 : 3$. Указанная плоскость делит описанный около призмы шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К-5 *I вариант*

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^3-x^2+1}=\sqrt[3]{2x^2-2x+1}$.

Решите неравенство (2—3):

2. $(x^2+3^x+3)^5>(x^2+9^x-3^x)^5$. 3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$.

Решите уравнение (4—7):

4. $\sqrt{x-5}=x-7$. 5. $\log_5(x+1)+\log_5(x-3)=1$.

6*. $\sqrt{x^2+\sqrt{x}-3}=\sqrt{2x+\sqrt{x}}$. 7*. $\frac{2\sin^2 x}{1-\cos x}=3$.

К-5 *II вариант*

1. Решите уравнение $\sqrt[5]{x^3+4x^2-2}=\sqrt[5]{x^2+4x-2}$.

Решите неравенство (2—3):

2. $(x^3+2\cdot 2^x+2)^3>(x^3+4^x+2^x)^3$. 3. $8^{x^2+7}>8^{3x+5}$.

Решите уравнение (4—7):

4. $\sqrt{x+3}=x-3$. 5. $\log_6(x+3)+\log_6(x-2)=1$.

6*. $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{x}}=\sqrt{3-\sqrt{x}}$. 7*. $\frac{2\sin^2 x}{\cos x+1}=1$.

К-6 *I вариант*

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{x-6}=x-7$.
2. $\lg(x^3-5x^2+6x+7)=\lg(x^3-4x^2+7x+1)$.
3. $(x^2-5x-14)\sqrt{x-6}=0$. 4. $\frac{\sin 2\pi x}{4x-1}=\frac{1}{4x-1}$.

Решите неравенство (5—6):

5. $\sqrt{3x-2}\leqslant x$. 6*. $\sqrt{x+3}>x-3$.

7*. Решите уравнение $2^{3x+7}+\sqrt{3x+7}=2^{x^2-11}+\sqrt{x^2-11}$.

К-6 *II вариант*

Решите уравнение (1—4):

1. $\sqrt{x+2}=x-3$.
2. $\lg(x^3-5x^2+3x+21)=\lg(x^3-6x^2+4x+27)$.
3. $(x^2-6x-16)\sqrt{x-3}=0$. 4. $\frac{\cos \pi x}{x-2}=\frac{1}{x-2}$.

Решите неравенство (5—6):

5. $\sqrt{x-5}<x-7$. 6*. $\sqrt{3x+4}\geqslant x$.

7*. Решите уравнение $5^{7x-1}+\sqrt{7x-1}=5^{x^2-9}+\sqrt{x^2-9}$.

К-7 *I вариант*

1. Решите уравнение $|x-3|-|2x-4|=-5$.

Решите неравенство **(2—3)**:

2. $\log_{0,2}(x-2)+\log_{0,2}x>\log_{0,2}(2x-3)$.

3. $\dfrac{\sqrt{36-x^2}\cdot\log_{0,5}x}{x-2}\leqslant 0$.

Решите систему уравнений **(4—5)**:

4. $\begin{cases}3\sqrt{x+y}-2\sqrt{x-y}=4\\2\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=3.\end{cases}$

5. $\begin{cases}2^{\log_2(x+y+1)}=x^2+y-1\\\log_{\sqrt{29}}(y^2+2x)=2.\end{cases}$

6*. Решите уравнение $\log_x(x^2+3)=\log_x(4x)$.

7*. Решите неравенство $x^2-2x+2\leqslant\cos\pi(x+1)$.

К-7 *II вариант*

1. Решите уравнение $|x-2|-|2x+2|=1$.

Решите неравенство **(2—3)**:

2. $\log_3(x+2)+\log_3 x<\log_3(2x+1)$.

3. $\dfrac{\sqrt{49-x^2}\cdot\log_5 x}{x-5}\geqslant 0$.

Решите систему уравнений **(4—5)**:

4. $\begin{cases}2\sqrt{x+y}-3\sqrt{x-y}=3\\3\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10.\end{cases}$

5. $\begin{cases}3^{\log_3(x-y+1)}=x^2-y-1\\\log_{\sqrt{21}}(y^2-2x)=2.\end{cases}$

6*. Решите уравнение $\log_x(x^2+4)=\log_x(5x)$.

7*. Решите неравенство $x^2-4x+5\leqslant\sin\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

К—4

Вариант 1

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
4) скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})\,\overrightarrow{AM}$;
5) площадь описанной около пирамиды сферы;
6*) угол между BD и плоскостью DMC.

К—4

Вариант 2

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})\,\overrightarrow{EA}$, где E — середина BC;
5) объем вписанного в пирамиду шара;
6*) угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.

Годовая контрольная работа по математике

Вариант 1

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми AD_1 и BM, где M-серединаребраDD_1.
2. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2.Найдите площадьполнойповерхностицилиндра.

Вариант 2

1. Высотаконуса6см,уголпривершинеосевогосеченияравен 120°.Найдите:
   А) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, уголмеждукоторымиравен60°
   Б)площадьбоковойповерхностиконуса.
2. Объем цилиндра равен 96π см^3, площадь его осевого сечения равна 48см^2. Найдитеплощадьсферыописаннойоколоцилиндра.

Вариант 3

1. Треугольник *ABC* – прямоугольный и равнобедренный с прямым углом *C* игипотенузой *4 см.* Отрезок *CM*перпендикулярен плоскости треугольника и равен *2см.*найдитерасстояниеотточки*M*допрямой*AB.*
2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна*10 см* и образует с боковымребромугол45^0.Найдитеобъемпирамиды.

Годовая контрольная работа по математике

1). Решитьнеравенство: $\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7}<0$.

2). Решитьуравнение: $4^{5x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4x}$

3). Решитьтригонометрическоеуравнение: $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}$

4). Найтипервообразнуюфункциит $f(x)=3x^2-5$,график которой проходит через очку*(2;10).*

5). Решитьуравнение: $\log_7(x^2-2x-8)=1$.

6). Найтинаибольшееи наименьшеезначениефункции наотрезке:
$y=2x^3+3x^2-12x-1$ на *[- 1;2]*

7). Решитьуравнение: $\sqrt{2x^2-5x+1}=\sqrt{x^2-2x-1}$